

TABLE 1. A list of  $(f, g)$ 's such that  $(C_{\mathcal{H}_m(f,g)})_\alpha$  is (near-) optimal for some  $\alpha \in P_{\mathcal{H}_m(f,g)}$  with  $\alpha_1 = 1$

$f$	$g$	$[n, k, d]$	optimal
$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_2 + x_3$	$x_1x_2x_3 + x_2x_3 + x_2$	$[3 \cdot 2^{m-2} - 4, m - 1, 3 \cdot 2^{m-3} - 2]$	optimal
	$x_1x_3 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_2 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_3 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_2 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1x_2x_3 + x_2x_3 + x_3$		
$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 + x_2x_3 + x_2 + x_3$	$x_1x_3 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_3 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_2 + x_2 + x_3$		
	$x_1 + x_2x_3 + x_2$		
$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_1 + x_2x_3 + x_2 + x_3$	$x_1 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_3 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_3 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1x_2x_3 + x_2x_3 + x_3$		
$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1 + x_2x_3 + x_2 + x_3$	$x_1x_2x_3 + x_2 + x_3$		
	$x_1 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_2 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1 + x_2x_3 + x_3$		
$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 + x_2x_3 + x_2$	$x_1x_2 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_1$		
	$x_1x_2x_3 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1$		
	$x_1x_3 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1$		
$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 + x_2x_3 + x_3$	$x_1x_2x_3 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3$		
	$x_1 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_1$		
	$x_1x_3 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1$		
	$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_2 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_1$		
$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 + x_2 + x_3$	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1$		
	$x_1x_3 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3$		
	$x_1 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_1$		
	$x_1x_2 + x_1 + x_3$		
$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 + x_2x_3 + x_3$	$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3$	$[3 \cdot 2^{m-2} - 4, m - 1, 3 \cdot 2^{m-3} - 3]$	near-optimal
	$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_1$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_2x_3$		
	$x_1 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3$		
	$x_1x_2 + x_1 + x_2x_3$		
	$x_1x_2 + x_1 + x_3$		
	$x_1x_3 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1$		
$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_3$			

$f$	$g$	$[n, k, d]$	optimal
$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 + x_2x_3 + x_2$	$x_1x_3 + x_1 + x_2$	$[3 \cdot 2^{m-2} - 4, m - 1, 3 \cdot 2^{m-3} - 3]$	near-optimal
	$x_1 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1x_2x_3 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_1$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_2x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_2$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3$		
	$x_1x_2 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1x_3 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1x_3 + x_1 + x_2x_3$		
	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1$		
	$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_2x_3$		
$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1 + x_2x_3 + x_2 + x_3$	$x_1x_2x_3 + x_2 + x_3$	$[3 \cdot 2^{m-2} - 4, m - 1, 3 \cdot 2^{m-3} - 3]$	near-optimal
	$x_1 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_2 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1x_2x_3 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1 + x_3$		
	$x_1x_2 + x_1 + x_3$		
	$x_1x_2 + x_1 + x_2x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_2$		
	$x_1x_2x_3 + x_1 + x_2$		
	$x_1 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1 + x_2$		
	$x_1x_2x_3 + x_1 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_2 + x_3$		
$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 + x_2 + x_3$	$x_1x_2x_3 + x_2 + x_3$	$[3 \cdot 2^{m-2} - 4, m - 1, 3 \cdot 2^{m-3} - 3]$	near-optimal
	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_1$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3$		
	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2$		
	$x_1x_2 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_3 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_3 + x_1 + x_2x_3$		
	$x_1 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_2 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_2 + x_1 + x_3$		
	$x_1x_2 + x_1 + x_2x_3$		
$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 + x_2x_3 + x_2 + x_3$	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_3$	$[3 \cdot 2^{m-2} - 4, m - 1, 3 \cdot 2^{m-3} - 3]$	near-optimal
	$x_1x_3 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2$		
	$x_1x_3 + x_1 + x_2$		
	$x_1x_3 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_2 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1x_2x_3 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1x_3 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_2x_3$		
	$x_1x_2 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_3 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_2x_3$		
$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2$			
$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_1 + x_2x_3 + x_2 + x_3$	$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_3$	$[3 \cdot 2^{m-2} - 4, m - 1, 3 \cdot 2^{m-3} - 3]$	near-optimal
	$x_1 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1x_3 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1 + x_2$		
	$x_1 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_3$		
	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_2$		
	$x_1x_3 + x_1 + x_2x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1 + x_3$		
	$x_1 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1x_3 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_2 + x_3$		
$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_2x_3$			
$x_1x_3 + x_1 + x_2$			

$f$	$g$	$[n, k, d]$	optimal
$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 + x_2x_3 + x_2$	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 + x_2$	$[3 \cdot 2^{m-2} - 5, m - 1, 3 \cdot 2^{m-3} - 3]$	optimal
	$x_1x_2 + x_1 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_1 + x_2$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2$		
	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1 + x_2$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1 + x_2x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 + x_2x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_1 + x_2x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 + x_2x_3 + x_3$		
$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1 + x_3$			
$x_1x_3 + x_1 + x_2x_3 + x_3$			
$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1 + x_2x_3$			
$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_1 + x_2x_3$			
$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3$			
$x_1x_2x_3 + x_1 + x_2x_3 + x_3$			
$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 + x_2x_3$			
$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_1 + x_3$			
$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_3$			
$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3$			
$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$			
$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1 + x_2x_3 + x_2 + x_3$		$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1 + x_2x_3$	$[3 \cdot 2^{m-2} - 5, m - 1, 3 \cdot 2^{m-3} - 3]$
	$x_1x_2 + x_2x_3 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1 + x_2$		
	$x_1x_2 + x_1 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1x_2 + x_1 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1 + x_2x_3 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_2x_3 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_2x_3 + x_2 + x_3$		
$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_2 + x_3$	$x_1x_2x_3 + x_2x_3 + x_2 + x_3$	$[3 \cdot 2^{m-2} - 5, m - 1, 3 \cdot 2^{m-3} - 3]$	optimal
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2$		
	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1x_2 + x_2x_3 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_3 + x_2x_3 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1x_3 + x_2x_3 + x_2 + x_3$		
$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 + x_2x_3 + x_2 + x_3$	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_2$	$[3 \cdot 2^{m-2} - 5, m - 1, 3 \cdot 2^{m-3} - 3]$	optimal
	$x_1x_3 + x_2x_3 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 + x_2x_3$		
	$x_1x_3 + x_1 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_2 + x_1 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 + x_2$		
	$x_1x_3 + x_1 + x_2 + x_3$		
	$x_1 + x_2x_3 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_2 + x_1 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1x_2 + x_2x_3 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 + x_3$		
	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 + x_3$		
$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 + x_2 + x_3$	$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_1 + x_3$	$[3 \cdot 2^{m-2} - 5, m - 1, 3 \cdot 2^{m-3} - 3]$	optimal
	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 + x_2$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_3 + x_1 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_2 + x_1 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1 + x_2$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2$		
	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_1 + x_2$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1 + x_3$		

$f$	$g$	$[n, k, d]$	optimal
$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_1 + x_2x_3 + x_2 + x_3$	$x_1x_2x_3 + x_1 + x_2x_3 + x_2$	$[3 \cdot 2^{m-2} - 5, m - 1, 3 \cdot 2^{m-3} - 3]$	optimal
	$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_1 + x_2$		
	$x_1 + x_2x_3 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_3 + x_1 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_3 + x_1 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_1 + x_2x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_2x_3 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1x_3 + x_2x_3 + x_2 + x_3$		
$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_1 + x_3$			
$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1 + x_2x_3 + x_2 + x_3$	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_2$	$[3 \cdot 2^{m-2} - 5, m - 1, 3 \cdot 2^{m-3} - 4]$	near-optimal
	$x_1x_2 + x_1 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1 + x_2 + x_3$		
$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_2 + x_3$	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2 + x_3$		
$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_1 + x_2x_3 + x_2 + x_3$	$x_1x_3 + x_1 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1 + x_2 + x_3$		
$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 + x_2x_3 + x_2$	$x_1x_3 + x_1 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_2$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1$		
$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 + x_2x_3 + x_3$	$x_1x_2 + x_1 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3$		
$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 + x_2 + x_3$	$x_1x_2x_3 + x_1 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1$		
$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 + x_2x_3 + x_2 + x_3$	$x_1x_2 + x_1 + x_2x_3 + x_3$		
	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2 + x_3$		
	$x_1x_3 + x_1 + x_2x_3 + x_2$		
$\text{wt}(f) = 6$ with $f_{000} = 0$	$\text{wt}(g) = 5$	$[3 \cdot 2^{m-2} - 6, m - 1, 3 \cdot 2^{m-3} - 4]$	optimal
$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 + x_2x_3 + x_2 + x_3$	$\text{wt}(g) = 2$	$[7 \cdot 2^{m-3} - 3, m - 1, 7 \cdot 2^{m-4} - 2]$	optimal
	$\text{wt}(g) = 3$ such that $g_u = 0$ for $u$ with $u_1 = 0$	$[7 \cdot 2^{m-3} - 4, m - 1, 7 \cdot 2^{m-4} - 2]$ , $[7 \cdot 2^{m-3} - 4, m - 1, 7 \cdot 2^{m-4} - 3]$	optimal near-optimal
	$x_2x_3 + x_2 + x_3$	$[7 \cdot 2^{m-3} - 4, m - 1, 7 \cdot 2^{m-4} - 2]$	optimal
	$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1$	$[7 \cdot 2^{m-3} - 5, m - 1, 7 \cdot 2^{m-4} - 4]$	near-optimal
	$\text{wt}(g) = 3$ such that $g_u = 1$ for $u$ with $u_1 = 0$	$[7 \cdot 2^{m-3} - 5, m - 1, 7 \cdot 2^{m-4} - 3]$	optimal
	$\text{wt}(g) = 5$	$[7 \cdot 2^{m-3} - 6, m - 1, 7 \cdot 2^{m-4} - 4]$	optimal